LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 4

Metode računanja određenog integrala. Nepravi integral.

Lekcije iz Matematike 2.

4. Metode računanja odredjenog integrala. Nepravi integral.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se pokazuje da metode računanja neodredjenog integrala, nakon odredjene preformulacije, vrijede i za odredjeni integral. Takodjer, uvodi se pojam nepravog integrala; to je proširenje pojma odredjenog integrala i na funkcije koje nisu definirane u granicama integrala ili kojima su granice $-\infty$ ili ∞.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Katkad je u primjenama potrebno računati površine koje se protežu u beskonačnost. To se, u mnogim važnim slučajevima, rješava pomoću nepravog integrala.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam nedredjenog integrala i metoda računanja te pojam odredjenog integrala.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Metoda parcijalne integracije odredjenog integrala.

Primjer 1. Izračunajmo $\int_0^3 xe^{-x}dx$.

1. način. Primijenimo formulu parcijalne integracije za neodredjeni integral

$$\int udv = uv - \int vdu$$

pa poslije uvrstimo granice:

$\int xe^{-x}dx = [u = x,\ du = dx;\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}] = x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

Sad je:

$\int_0^3 xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})|_0^3 = -4e^{-3} + 1.$

2. način - izravna parcijalna integracija odredjenog integrala.

Koristimo formulu:

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$$

(uz napomenu da se granice u svim integralima odnose na x, tj. x ide od a do b, a ne u, odnosno v).
$\int_0^3 xe^{-x}dx = [u = x,\ du = dx;\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}] = x(-e^{-x})|_0^3 - \int_0^3(-e^{-x})dx = -3e^{-3} - e^{-x}|_0^3 = -4e^{-3} + 1$.

Uvodjenje nove nepoznanice u odredjeni integral.
Prema analognim formulama za neodredjeni integral imamo:

1. formula. Ako je $f(x) = h[g(x)]g'(x)dx$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(t)dt$$

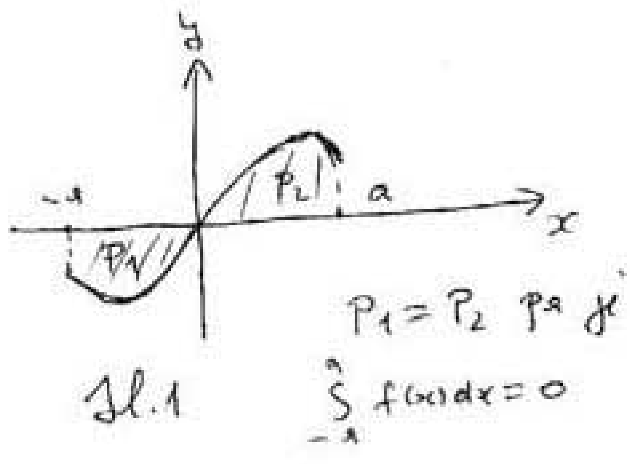
Tu smo zamijenili $[g(x) = t,\ g'(x)dx = dt]$ i **promijenili granice:** za $x = a$ je $t = g(x) = g(a)$ i slično za b.

2. formula - prava supstitucija. Uz zamjenu $x = g(t),\ dx = g'(t)dt$ imamo:

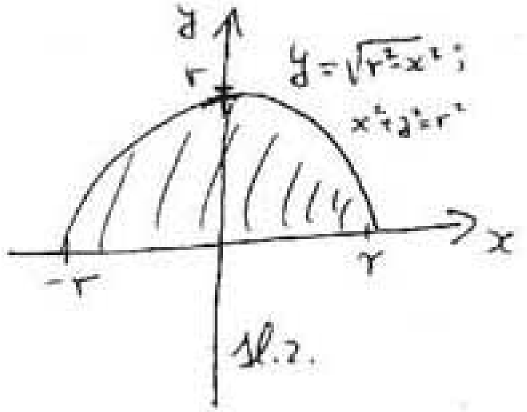
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

Tu g treba imati inverznu fiunkciju.

Primjer 2. - uporaba 1. formule. Izračunajmo $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$.
Stavimo $[g(x) := \sqrt{x^2+3} = t,\ x^2 + 3 = t^2,\ xdx = tdt]$. Sad je $g(-1) = g(1) = \sqrt{4} = 2$, pa je
$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \int_2^2 \frac{tdt}{t} = 0$ (jer je donja granica jednaka gornjoj; čim smo to dobili mogli smo prestati s računanjem).
Objašnjenje (sl.1.). Podintegralna funkcija je neparna, a interval po kojemu integriramo simetričan, pa smo i bez računanja, mogli zaključiti da je integral jednak nuli (površina ispod osi x jednaka jeonoj iznad osi x).



Primjer 3. - uporaba 2. formule - površina kruga. Izračunajmo $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$ (sl.2.).

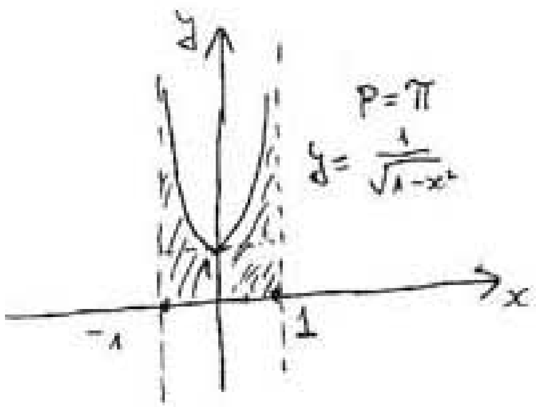


Sl.2.

Stavimo: $[x = g(t) = r\sin t,\ dx = r\cos t dt;\ t = g^{-1}(x) = Arcsin(\frac{x}{r})]$, pa je:
$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx =$
$\int_{Arcsin(\frac{-r}{r})}^{Arcsin(\frac{r}{r})}\sqrt{r^2 - r^2x^2}r\cos t dt =$
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t dt =$
$r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt =$
$(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4})|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$
$r^2\frac{\pi}{2}$.
Iz slike vidimo da smo ovako izračunali površinu polovice kruga.
Uočimo da je ovaj odredjeni integral bilo bitno lakše izračunati ovako, nego preko računanja neodredjenog integrala.

Nepravi integral. Ima više tipova nepravih integrala. Upoznat ćemo ih kroz primjere.

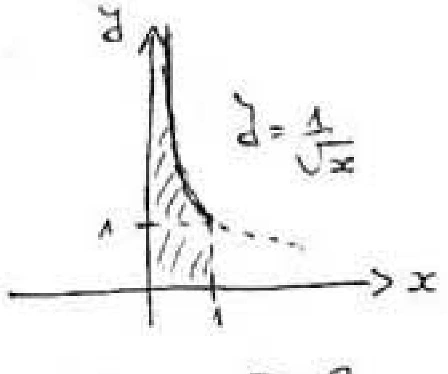
Primjer 4. - kad u jednoj ili objema granicama f nije definirana.
(i) Izračunajmo $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (sl.3.).



Sl.3.

Problem je u tome što podintegralna funkcija nije definirana u granicama integrala (već samo na otvorenom intervalu $< -1, 1 >$), pa bi površina mogla biti beskonačna. Tu smo imali sreću da je primitivna funkcija $Arcsix$ podintegralne funkcije definirana i u rubovima integrala pa je
$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsinx|_{-1}^{1} = Arcsin(1) - Arcsin(-1) = 2Arcsin(1) = \pi.$

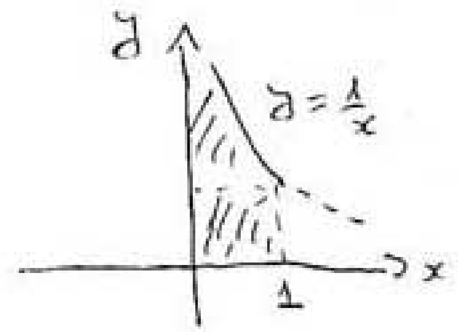
(ii) Izračunajmo $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (sl.4.).



Sl.4

Problem je poput onog u (i) - podintegralna funkcija nije definirana u nuli - i razrješava se slično, jer je primitivna funkcija $2\sqrt{x}$ podintegralne funkcije definirana u nuli.
$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2.$

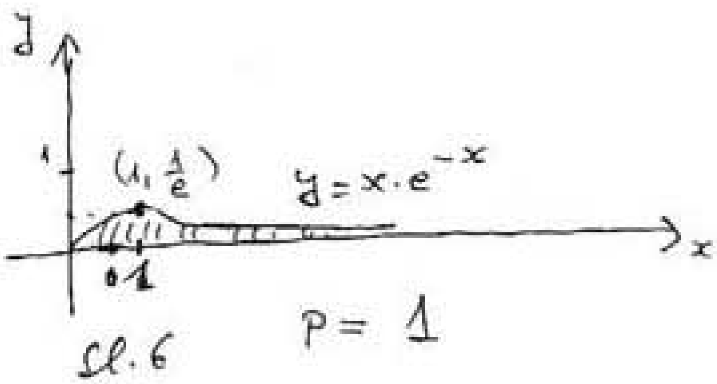
(iii) Izračunajmo $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ (sl.5.).



Sl.5.

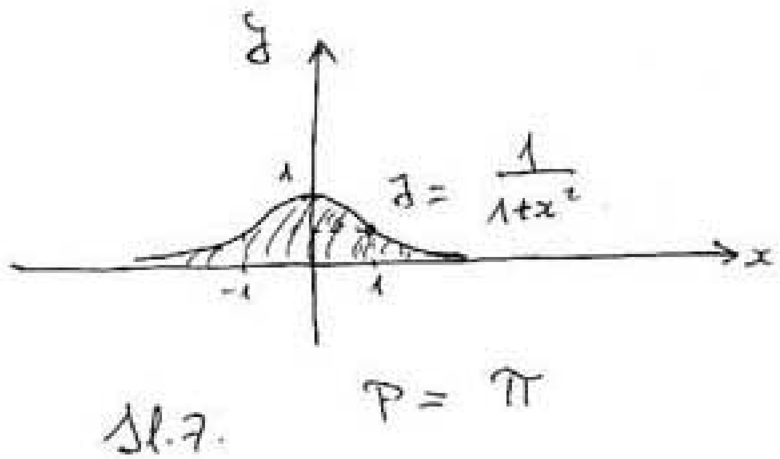
Tu je primitivna funkcija $\ln x$, koja nije definirana u nuli, štoviše, $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, što pišemo i kao $\ln(0) = -\infty$, pa je:
$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_0^1 = \ln(1) - ln(0) = 0 - (-\infty) = +\infty$, tj. površina je beskonačna.

Primjer 5. - kad je $\pm\infty$ granica integrala.
(i) Izračunajmo $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
Tu je problem što je područje integracije beskonačan interval (sl.6.).



Sjetimo se (Primjer 1.) da je primitivna funkcija ovdje $-xe^{-x} - e^{-x}$, i da je (iz L'Hospitalova pravila) $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e}^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e}^x = 0$, pa je:
$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}|_0^{+\infty} = (0-0)-(0-1) = 1$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{+infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2Arctg(x)|_0^{+\infty} = 2Arctg(+\infty) - 2Arctg(0) = 2\frac{\pi}{2} - 0 = \pi$. (sl.7.)



V. Pitanja i zadaci

1. Izračunajte površinu unutar elipse s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Uputa: U jednadžbi poluelipse: $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, stavite $x = a\sin t$.

2. Izaberite po volji segment $[a, b]$ i funkciju f koja mijenja predznak (možda i više puta).
(i) Pomaknite graf u desno ili u lijevo za $c > 0$. Je su li se time površine izmedju grafa i osi x promijenile? Kako se zadatak može riješiti analitički?
(ii) isto pitanje, samo što sad graf rastegnemo, odnosno spljoštimo vertikalno c puta (crtajte i zaključujte pri $c = 2$).
(iii) isto pitanje, samo što sad graf rastegnemo, odnosno spljoštimo horizontalno c puta (crtajte i zaključujte pri $c = 2$).

Uputa: U (i) površine se ne mijenjaju; analitički, umjesto $f(x)$ imamo funkcije $f(x - c)$, odnosno $f(x + c)$.
U (ii) površine se povećavaju, odnosno smanjuju 2 puta (umjesto f gledamo funkcije $2f$, odnosno $\frac{1}{2}f$).
U (ii) površine se povećavaju, odnosno smanjuju 2 puta (umjesto $f(x)$ od a do b gledamo funkcije $f(\frac{x}{2})$ od $2a$ do $2b$, odnosno $f(2x)$ od $\frac{a}{2}$ do $\frac{b}{2}$.

3. Izračunajte za cijele brojeve m, n:
(i) $\int_{-\pi}^{pi} \sin(mx)\cos(nx)dx$
(ii) $\int_{-\pi}^{pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$
(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$
Uputa: U (i) je funkcija neparna. U (ii) i (iii) koristite formulu za pretvaranja umnoška u zbroj.

4. Izračunajte površinu ispod grafa funkcije $f(x) := \frac{1}{x^2}$ za $x \geq 1$ i nacrtajte sliku.

5. U integralu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx$, gdje su $\sigma > 0$ i μ realni brojevi, zamijenite varijablu zamjenom: $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$. Skicirajte staru i novu podintegralnu funkciju i procijenite rezultat.